Шифр: А-22

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по Математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Кингисеппский

Школа КСОШ №5

Класс 9а

ФИО Тачетамев Евгений Александрович.

Чистовик А-22 лист 1.

9.1.

$f(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$

$g(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$.

По условию трёхчлены приведённые $\Rightarrow$

$a_1 = 1$; $a_2 = 1$.

$f(x) = x^2 + b_1 x + c_1$

$g(x) = x^2 + b_2 + c_2$

т.к. $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$, то.

$$\begin{array}{r} 1 + b_1 + c_1 = 4 + 2b_2 + c_2 \\ - \\ 4 + 2b_1 + c_1 = 1 + b_2 + c_2 \\ \hline \end{array}$$ Из 1-ого вычтем 2-о

$-3 - b_1 = +3 + b_2$

$-b_1 - b_2 = 6$

Сумма корней трёхчлена равна $-b$

$x_1 + x_2 = -b_1$. x_1 и x_2 - корни $f(x)$

$x_3 + x_4 = -b_2$ x_3 и x_4 - корни $g(x)$

Подставим.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

Ответ: 6.

9.2.

Рассмотрим человека, который сказал, что у него число меньше 1, но раньше он сказал, что его число больше 1 ⇒ Он точно как максимум лжец, т.к. целые числа, которые <1 и >1, не пересекаются.

Также рассмотрим человека, который сказал, что его число <2, тогда как максимум его число >1, но целые числа, которые <2 и >1, не пересекаются ⇒ Он лжец.

Ещё рассмотрим людей, которые сказали, что их числа >9 и >10, тогда потом как максимум они сказали, что их числа меньше 10, но целые числа, которые >9 и <10, не пересекаются ⇒ Они оба лжецы. Итого у нас 4 лжеца.

Пример:

л.	л.							л.	л.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
^	^	^	^	^	^	^	^	^	^
1	2	4	5	6	7	8	9	9	10
^	^	^	^	^	^	^	^	^	^
1	2	5	6	7	8	9	10	3	4

Снизу то, что они сказали во второй раз. ~~Обвве~~ обведём рыцарей.

Ответ: рыцарей 6 максимум.

9.3. А-22 Чистовик лист №2.

Пронумеруем наши числа по часовой от x_1 до x_{100}

Тогда если $x_n < x_{n+1}$, то $x_n \bmod x_{n+1} = x_n$

если $x_n > x_{n+1}$, то $(x_n \bmod x_{n+1}) < x_{n+1}$

Получается, что $(x_{n+1} > x_n)$ может быть только два или один раз, т.к. каждый ост. от дел x_n на x_{n+1} будет различен, т.к все x различны по условию, а различных остатков только два.

Пусть у нас две пары, когда $x_j < x_{j+1}$ и $x_n < x_{n+1}$, в это случае у нас только остатки x_n и x_j

Тогда пусть $x_n < x_j$

Рассмотрим число x_{n-1}. Тогда $x_{n-1} > x_n$ и $(x_{n-1} \bmod x_n) < x_n \Rightarrow$ У нас будет три разных остатка и вариант, где $x_j < x_{j+1}$ и $x_n < x_{n+1}$ не подходит $\Rightarrow$ у нас есть только вариант, где только одна пара $x_n < x_{n+1}$

Тогда x_{n+1} наибольшее число, т.к

$x_{n+1} > x_{n+2} > x_{n+3} >$

$> x_n$, а

x_n - наименьшее

Во всех парах мы будем получать разные остатки, т.к. $x_j > x_{j+1} \Rightarrow$

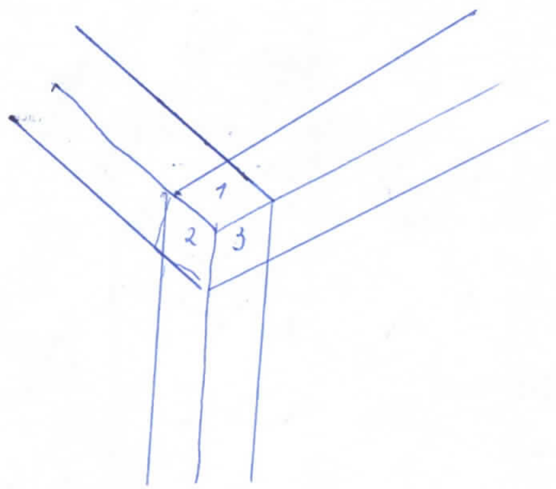
$x_{j+1} \bmod x_j = x_{j+1}$, а т.к. все X_k различны то все остатки различны, но надо рассмотреть случай, где $x_j < x_{j+1}$

(Он такой один, раньше мы доказали, что x_j - наименьшее число $\Rightarrow |x_{j+1} \bmod x_j| < x_j$,

а т.к. все другие остатки $\geq x_j$, то этот остаток тоже будет различен от других.

9.5.

Рассмотрим точку вершины.



В ~~той~~ этой точке 3 клетки имеют попарные ~~грани~~ стороны

1 граничит с 2 и 3, а 2 с 3. Тогда получает, что только одна из этих клеток может быть покрашена.

Пусть это будет клетка №1.

А-22 чистовик лист 3

~~Тогда рассмотрим сто~~

Тогда строки, в которых 1 и 2, 3 и 4,

покрасим в шахматном порядке, а

столбцы, в которых 2 и 3, нельзя так покрасить =

один из столбцов будет совсем не покрашен, тогда из

~~верш~~ каждой вершины мы не будем

закрашивать по столбцу, но из ~~д~~ двух ~~каждых~~

вершин можно не закрасить

один столбец, т.к. вершин 8, то мы

не закрасим 4 столбца, а всё ост.

в шахматном порядке.

всего 6 000 000 кл., в столбце 1000

$$\frac{6000000-(4\cdot 1000)}{2} = 3000000-2000 =$$

$= 2998000$

Ответ: 2998000 кл

1	2	3	4	5	Σ
7	3	7	X	1	18

А-22 Чистовик

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	1	15

№6.

У нас есть числа $x; (x+1); (x+2)$ и $x+3$.
Рассмотрим суммы (1, 2 и 3) и (2, 3 и 4)

$x+x+1+x+2=3(x+1)$

$x+1+x+2+x+3=3(x+2)$

Обе суммы делятся на 3

$(x+1)$ и $(x+2)$ - это два посл. числа $\Rightarrow$
Одно из них делится на 2, а т.к.
по условию $x>100$, то $\left(\frac{x+1}{2}\right.$ или $\left.\frac{x+2}{2}\right)>50 \Rightarrow$
суммы можно представить в виде
произведения $3\cdot 2\left(\frac{x+2}{2}\right)$ или $\left(3\cdot 2\cdot\frac{x+1}{2}\right)$

№7.

Кол-во точек, в которых находятся вершины
равно: $\frac{4n}{3} \Rightarrow$ n-кол-во пр/уг и $n \vdots 3$.
Пусть n равно 6.

Тогда рассмотрим 8 точек.

O_1 O_2 O_3 O_4

O_5 O_6 O_7 O_8.

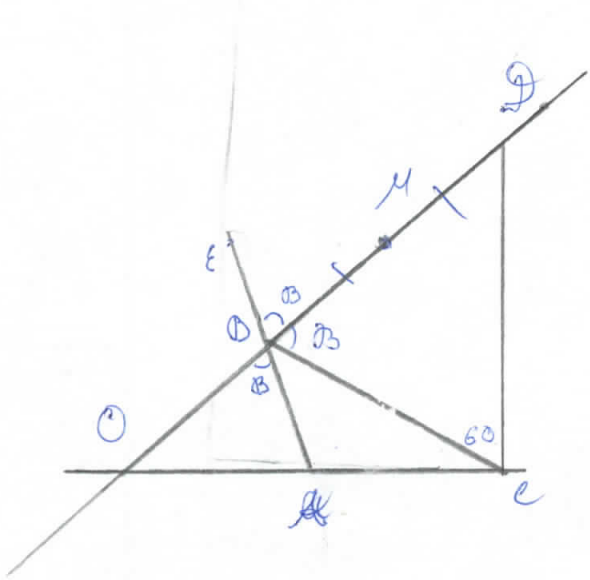
Сначала поставим 3 круг на точки $(O_1 O_2 O_6 O_5)$, $(O_2 O_3 O_6 O_7)$ и $(O_3 O_4 O_8 O_7)$

Потом два на точки $(O_1 O_5 O_7 O_3)$ и $(O_2 O_6 O_8 O_4)$

И один на $(O_1 O_4 O_8 O_5)$

Каждая точка упоминалась по 3 раза $\Rightarrow$ Наше условие выполнимо.

№3.



Дано: $\triangle ABC$, M – сер. BD
внешняя бис: BD
$\angle BCD = 60°$; $DC = 2BA$
Док-ть: AMC – р/б.
Док-во:
$\angle DBC = \angle EBD = \beta$
$\angle BDC = 180 - 60 - \beta = 120 - \beta$
$\angle BAC + \angle ACB = 2\beta$

~~Д. Рассмотрим прямые~~
Продлим DB AC $\in O$
$\angle OBA = \beta = \angle EBD$

~~№5~~ · А-22 Чистовик. лист 2.

№10

Если у нас больше 49 0, то Ваня в каждую ~~единиц~~ пару возьмёт 0 и на доске появится 0. $\Rightarrow$ 0 < 50

Тогда рассмотрим случай если нет 0, тогда и Ваня умн. наиб. на именьшее. Рассмотрим их произведение.

x - наиб. число.

$$x \cdot \frac{1-x}{99} = \frac{x(1-x)}{99}$$

$x(1-x)$ наиб. при $x = 1-x$
$x = 0,5$

$$\frac{0,25}{99} = \frac{1}{396}.$$

Рассмотрим ситуацию ~~в к~~, когда у нас есть 0, тогда наш оппонент будет наибольшее умножать на 0, ~~и наибольшее произв. будет равно~~ ~~у кол-во~~ ~~0~~ и в итоге наше наибольшее будет ~~равно~~ ~~$\frac{1}{100-y}$ или меньше его~~ равно: $\frac{1}{100-y}$ ~~или мен~~, а наименьшее $\leq \frac{1}{100-y}$

Тогда их произведение $\leq \frac{1}{100-y} \cdot \frac{1}{100-y} =$

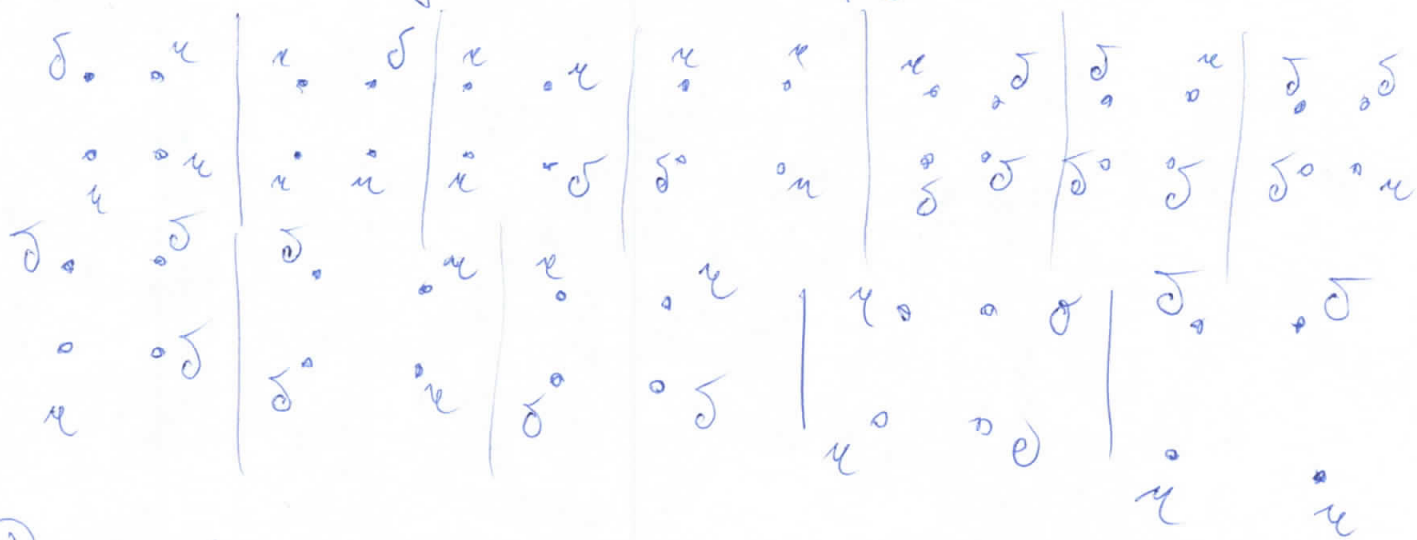
$$\frac{1}{|100-y|^2}$$ y - макс. равен 49

$\frac{1}{51^2}$, но это меньше $\frac{1}{396}$.

Ответ: $\frac{1}{396}$.

№ 4

Для 4-ёх угольника 12 способов



Для 5 угольника 20.